has at least two distinct elements in it. ■

DAY 26

Continuity on $[a, b]$

আমরা জানি যে $f : A \to B$ যদি একটা function হয় তবে $f(A)$ হল image of f. অনেক সময়ে A-র বিভিন্ন ধর্ম $f(A)$-এর মধ্যেও সংক্রামিত হয়। আমরা এখানে দেখব যে, A যদি একটা closed, bounded interval হয়, আর $f(x)$ হয় continuous, তবে $f(A)$-ও একটা closed, bounded interval হতে বাধ্য। এই কথাটা পরে নানা কাজে লাগবে।
প্রথমে চট্ করে মনে করে নিই closed, bounded interval-রা কিরকম দেখতে। Interval মানে হল $\mathbb{R}$-এর "একটানা" কোনো subset, যার মাঝে কোনো ফাঁক নেই, যেমন $(0,1)$ বা $[0,1)$ বা $[100, 200]$ বা $(-\infty, 3)$ এই রকম।

Exercise 364: এদের মধ্যে একটাই খালি interval, কোনটা? (i) $\{0,1,2\}$ (ii) $(0,1)\cup(1,2)$ (iii) $\{10\}$. ■

সব interval-ই closed নয়, যেমন $(0,\infty)$ বা $(0,1)$ বা $[0,1)$ এরা কেউ closed নয়। কিছু closed interval-এর উদাহরণ হল $[0,1], (-\infty,4], [0,\infty)$. এদের মধ্যে $(-\infty,4]$ আর $[0,\infty)$ আবার bounded নয়। সুতরাং সব মিলিয়ে দাঁড়ালো— closed, bounded interval-রা দেখতে হয় $[a,b]$-র মত, যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a \leq b$.
এবার দেখি continuous function-দের বেলায় এদের image সম্বন্ধে কি বলা যায়। প্রথমে খালি interval-দের নিয়ে কাজ করি (closed, bounded ভুলে গিয়ে)।

Example 85: ধরো A হল যেকোনো একটা interval, যেমন হতে পারে $A = (0,1)$ বা $[0,2]$ বা $[0,\infty)$. $f : A \to \mathbb{R}$ হল যে কোনো একটা continuous function. তাহলে কি $f(A) = (1,3)\cup(5,7)$ কখনো হতে পারে?

SOLN:

না, কারণ $(1,3)\cup(5,7)$ set-টার মধ্যে একটা ফাঁক আছে। এই ফাঁকের দুই দিকে দুটো point নাও set-এর মধ্যে, ধরো 2 আর 6. যদি সত্যিই $f(A) = (1,3)\cup(5,7)$ হত তবে আমরা এমন $a, b \in A$ পেতাম যাতে $f(a) = 2$ আর $f(b) = 6$ হয়। এইবার ফাঁকের মধ্যে যা খুশী একটা point নাও, যেমন 4. তাহলে intermediate value theorem বলছে যে, এমন একটা $c \in (a,b)$ আছে যাতে $f(c) = 4$ হয়। (যেহেতু A একটা interval, সুতরাং $c \in A$ হবেই, তাই $f(c)$-র defined হওয়া নিয়ে কোনো দুশ্চিন্তা নেই।) কিন্তু সেটা তো হতে পারে না, কারণ $4 \notin (1,3)\cup(5,7) = f(A)$. ■

তার মানে intermediate value theorem বলছে যে একটা continuous function-এর domain-এ যদি কোনো ফাঁক না থাকে