সেই কথাটা গ্রাফ থেকে মোটেই বোঝা যাচ্ছে না। সেইটা বোঝানোর জন্য আমরা গ্রাফটাকে আঁকব Fig 60-এর মত করে। ঐ ডট্‌টা বলে দিচ্ছে যে $f(1)$-এর value কত হবে। যে মাথায় ডট্ নেই সেটাকে আমরা একটু মুড়িয়ে দিয়েছি (একটা ছোট্টো ব্যারিকেড বসিয়ে), যাতে কোনো ভুল বোঝাবুঝির সম্ভাবনামাত্র না থাকে। ■

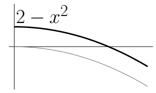


Fig 57

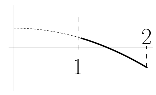


Fig 58

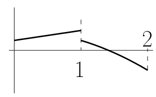


Fig 59

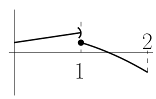
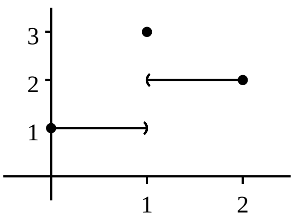


Fig 60

Example 27: যদি

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < 1 \\ 3 & \text{if } x = 1 \\ 2 & \text{if } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

হয়, তবে তার গ্রাফ হবে এরকম—



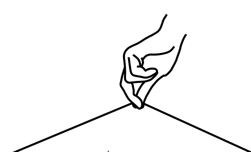
■

2.2.3 Absolute value function, $|x|$

একাধিক টুকরো-ওয়ালা function নিয়ে প্রথম মাথা ঘামানো কি করে শুরু হল তার একটা মজার ইতিহাস আছে। আগে function বলতে খালি সহজ সহজ জিনিস বোঝাতো যেগুলোকে কেবল একখানা ফর্মুলা দিয়েই লিখে ফেলা যায়, যেমন $x^2 + 3x$ বা $\sin x$ এইসব। D'Alembert নামে একজন পন্ডিত ছিলেন, তাঁর আগ্রহ ছিল বিভিন্ন তারের বাদ্যযন্ত্র কি করে শব্দসৃষ্টি করে সেই বিষয়ে গবেষণা নিয়ে। ধরো গীটারের একটা তার, সেটা যখন কাঁপছে তখন দেখতে হবে Fig 61-এর মত কিছু একটা। এইটাকে D'Alembert দিব্যি sine, cosine ইত্যাদি দিয়ে লিখতে পারছিলেন। কিন্তু যখন তারটা প্রথম টানা হয়েছিল তখন সেটা দেখতে ছিল Fig 62-এর মত, যেটা দুটো সরলরেখা জুড়ে তৈরী। এইখানেই D'Alembert ভারী ধন্দে পড়ে গেলেন, পুরোটাকে একটা function বলে কি ভাবা উচিত? সে আমলে Euler[2] বলে আরেকজন গণিতজ্ঞ ছিলেন, তিনি বলেন যে দুটো টুকরোকে একসঙ্গে মিলিয়ে একটা function ভাবতে আপত্তি থাকা উচিত নয়। অবশ্য সে কথাটা D'Alembert-এর মনে ধরে নি। একটা function-এর একাধিক টুকরো থাকতে পারে কিনা এই নিয়ে যখন বেজায় তর্ক চলছে তখন Cauchy (কোশি) নামে এক ফরাসী গণিতজ্ঞ এই function-টা নিলেন—

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \ge 0 \\ -x & \text{otherwise.} \end{cases}$$


গীটারের তার যখন কাঁপছে।
Fig 61


যখন প্রথম টানা হয়েছে।
Fig 62

[2] উচ্চারণ অয়লার। ইউলার নয়!

প্রথমেই $\forall a \in A$আছে, তাই—

$\forall a$ Take any $a \in A$.

এবার একটা $\epsilon > 0$ বার করতে হবে।

Then $a \in A_i$ for some A_i.

Since A_i is open,

$$\exists \epsilon > 0 \quad N(a, \epsilon) \subseteq A_i.$$

$\exists \epsilon$ Choose this $\epsilon > 0$.

এই হল আমাদের প্রয়োজনীয় ϵ. এবার দেখাব যে $N(a, \epsilon) \subseteq A$.

$\because A_i \subseteq A \therefore N(a, \epsilon) \subseteq A$, as required.

[Q.E.D]

আমরা দেখেছি যে open interval-রা open set হয়, এবং open set-দের union সর্বদা open হয়। সুতরাং কিছু open interval-এর union নিলে একটা open set পাবে। মজা হল এর উল্টোদিকটাও সত্যি! মানে যেকোনো (nonempty) open set-কেই কিছু open interval-এর union হিসেবে লিখে ফেলা যায়। প্রমাণটা এক্কেবারে সোজা—

Exercise 58: Show that every nonempty open set can be expressed as a union of open intervals.[2] **(2013.2c)** ■

Soln:

Let $A \neq \phi$ be an open subset of $\mathbb{R}$.

Then $\forall a \in A \quad \exists \epsilon_a > 0 \quad N(a, \epsilon_a) \subseteq A$.

এখানে হঠাৎ খালি ϵ না লিখে ϵ_a লিখলাম কেন? কারণ এখানে আমরা বিভিন্ন a-র জন্য পাওয়া বিভিন্ন ϵ নিয়ে একই সঙ্গে কাজ করব। তাই কোন ϵ-টা কোন a-র জন্য সেটা খেয়াল রাখার জন্য ϵ_a লিখেছি। ঠিক যেমন "সব মেয়েরই একটা কুকুর আছে" লেখার জন্য

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d \in DOG \quad g \text{ has } d$$

লিখলেই চলে। কিন্তু এবার যদি মেয়েরা সবাই তাদের কুকুরকে নিয়ে কোনো কুকুর-প্রদর্শনীতে যায় তবে কুকুরের গলায় তাদের মালিকের নাম লেখা বক্‌লস্ লাগিয়ে দেওয়া ভালো। অংকের ভাষায়

$$\forall g \in GIRL \quad \exists d_g \in DOG \quad g \text{ has } d_g.$$

তবে একাধিক মেয়ের কুকুরদের নিয়ে একসঙ্গে কাজ করতে না হলে d_g না লিখে খালি d লিখলেই চলে। আমাদের অংকে ফিরে আসি। লক্ষ কর যে $N(a, \epsilon_a)$-রা সবাই open interval. এদের union নিলেই তো পুরো A-টা পেয়ে যাব!

Example 50: Show that 2 is an isolated point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$.

SOLN:

To show 2 is an isolated point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$,

তার মানে দেখাতে হবে যে $2 \in \{1, 2, 2.5, 3\}$ (যেটা বলাই বাহুল্য!), কিন্তু 2 এই set-টার limit point নয়।

i.e., $2 \in \{1, 2, 2.5, 3\}$, which is obvious, and 2 is a not a limit point of $\{1, 2, 2.5, 3\}$,

i.e.,

Target $\exists \epsilon > 0 \quad N'(2, \epsilon) \cap \{1, 2, 2.5, 3\} = \phi.$

এইটা পেলাম limit point-এর সংজ্ঞার negation নিয়ে। Fig 113 থেকে দেখতে পাচ্ছি যে 2 সংখ্যাটা বাকীদের থেকে একটু তফাতে আছে, আমরা ϵ-টা নেব এমনভাবে যাতে সেটা 2-এর নিকটতম প্রতিবেশীর দূরত্বের সমান বা তার চেয়ে কম হয়। এখানে 2-এর বাঁদিকের প্রতিবেশী হল 1, (দূরত্ব $= 2 - 1 = 2$) আর ডানদিকের প্রতিবেশী হল 2.5 (দূরত্ব $2.5 - 2 = \frac{1}{2}$). তার মানের নিকটতম প্রতিবেশী হল 2.5, যার দূরত্ব $\frac{1}{2}$. তাই আমরা $\epsilon = \frac{1}{2}$ নিতে পারি।

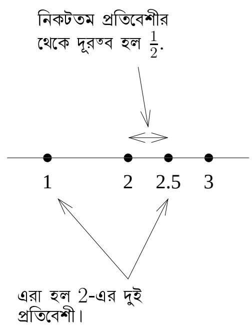


Fig 113

$\exists\epsilon$ Choose $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Check Then $N'(2, \epsilon) = (\frac{3}{2}, 2) \cup (2, \frac{5}{2})$.

So $N'(2, \epsilon) \cap \{1, 2, 2.5\} = \phi$, as required.

■

Exercise 73: দ্যাখাও যে নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রেই a সংখ্যাটা S-এর একটা limit point, কিন্তু b সংখ্যাটা নয়। ছবি এঁকে নিতে ভুলো না যেন!

1. $S = [1, 2] \cup \{3\}, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 3.$
2. $S = (-1, \infty), \quad a = -1, \quad b = -2.$
3. $S = (0, 1) \cup \mathbb{N}, \quad a = 1, \quad b = 2.$

■

অনেক ছাত্রকেই দেখেছি যারা limit point আর boundary point গুলিয়ে ফেলে। যেমন, যদি বলি $(0, 1)$-এর তিনটে limit point দিতে, তবে দুটো limit point চটপট বলতে পারবে—0 আর 1. তারপর খানিকক্ষণ মাথা চুলকে আমতা আমতা করে বলবে— মাঝের

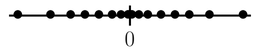


Fig 124

$\because \{0\} \not\subseteq \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$

$\therefore$ the set is not closed.

■

নীচের অংকটা দেখতে অন্যরকম হলেও আসলে জিনিসটা একই। খালি শুরুটা ধরিয়ে দিচ্ছি।

Exercise 101: Correct or justify: $\left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos\frac{1}{x} = 0\right\}$ is not a closed set.[3] **(2012.1ci)** ■

Soln:

প্রথমে ভেবে নিই set-টা দেখতে কিরকম। কখন $\cos\frac{1}{x} = 0$ হয়? যখন $\frac{1}{x}$ দেখতে হয় $(2n-1)\frac{\pi}{2}$-এর মত, যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. তার মানে x হবে $\frac{2}{\pi(2n-1)}$-এর মত দেখতে। অর্থাৎ আমাদের set-টা হচ্ছে

$$\left\{\frac{2}{\pi(2n-1)} \ : \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

একটু ভাবলেই বুঝবে যে n যতই ∞ বা $-\infty$-র দিকে যাচ্ছে, ততই point-গুলো 0-র কাছে ভীড় জমাচ্ছে। ফলে ছবিটা হচ্ছে Fig 124-এর মত। সন্দেহ নেই নিশ্চয়ই যে 0 একটা limit point, অথচ 0 নিজে কিন্তু set-টার মধ্যে নেই। সুতরাং set-টা আর closed হয় কি করে?

এবার এটা ধাপে ধাপে গুছিয়ে লেখো দেখি, ঠিক আগের অংকটার মত করে।

■

Exercise 102: Let $A \subset \mathbb{R}$ and G be an open subset of $\mathbb{R}$. If A' denotes the set of all limit points of A then show that $G \cap A' = \phi$ whenever $G \cap A = \phi$. [3] **(1998,2006)** ■

Soln:

প্রথমে লিখে শুরু করি কি দেওয়া আছে আর কি দেখাতে হবে—

Given: $A \subset \mathbb{R}$ any subset, $G \subset \mathbb{R}$ open, $G \cap A = \phi$.

To show: $G \cap A' = \phi$.

আমরা এখানে proof by contradiction করব।

Let, if possible, $G \cap A' \neq \phi$.

যদি $G \cap A' \neq \phi$ হয় তবে এর মধ্যে অন্ততঃ একটা point আছে। এইরকম একটা point নিই—

Pick any $x \in G \cap A'$.

যেহেতু G open তাই x-কে ঘিরে G-এর মধ্যে কিছুটা ফাঁকা জায়গা পাব।

7.3 Existence of supremum

যেসব set-এর কোনো upper bound থাকে না, তাদের বলে unbounded above. এরা একেবারে ∞ পর্যন্ত বিস্তৃত হয়, যেমন $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ বা $(2, \infty)$. এই রকম set-এর supremum থাকে না। কেন থাকে না বুঝতেই পারছ—unbounded above হলে কোনো upper bound-ই পাবে না, ফলে আঙুলটা কোথায় রেখে শুরু করবে?
আরেকটা set-এরও supremum থাকে না, সে হল ϕ. কারণ ϕ-এর বেলায় আঙুলটা বাঁদিকে যতই সরাও কোনো দিনই আটকাবে না। আসলে ϕ তো বেমালুম ফাঁকা, কিসে আর আটকাবে?
এই দুই ধরণের set-কে বাদ দিলে বাকী সব set-এর ক্ষেত্রেই supremum থাকতে বাধ্য। এই কথাটাকে বলে **completeness axiom** বা **supremum axiom** বা **least upper bound axiom**। কথাটা শুনতে মামূলী লাগতে পারে, কিন্তু এর অপরিসীম গুরুত্ব। সেই প্রসঙ্গে আমরা একটু পরেই আসছি।

Exercise 114:
State the least upper bound axiom for the set of real numbers.[1] **(1997,2001,2003,2005,2009,2010,2013)** ■

Soln:

LEAST UPPER BOUND AXIOM

If $A \subseteq \mathbb{R}$ is nonempty and bounded from above, then A has a supremum in $\mathbb{R}$.

এখানে একটা ছোট্টো কথা বলে রাখি— আমরা কিন্তু খালি "A has a supremum." না লিখে লিখেছি "A has a supremum <u>in $\mathbb{R}$.</u>" ঐ শেষের "in $\mathbb{R}$"-টুকু না লিখলে মনে হত যেন supremum-টা A-র ভিতরেই থাকবে। কিন্তু সেটা ঠিক নয়, যেমন $(0, 1)$-এর supremum হল 1, কিন্তু $1 \notin (0, 1)$.

■

Exercise 115: State the completeness axiom of $\mathbb{R}$.[1] **(2011)** ■

Soln:

আগের প্রশ্নটাই।

■

Supremum-এর জন্য একটা axiom আছে। Infimum-এর জন্য নেই? না, কারণ supremum-এর axiom-টা থেকেই আমরা infimum-এর অস্তিত্বও পেয়ে যেতে পারি। সেটাই নীচের অংকে চাওয়া হয়েছে।

$b_n\}_n, \{a_n - b_n\}_n, \{a_n b_n\}_n$,-ও convergent হবে। এটা বোঝা কঠিন নয় যে

$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \quad a_n b_n \to ab$$

হবে। ভাগের বেলাতেও আমরা একই কথা বলতে পারি—$a_n/b_n \to a/b$, খালি বুঝতেই পারছ যে তার জন্য $b_n, b \neq 0$ লাগবে।
Divergent sequence-দের বেলাতেও গল্পটা একইরকম। যদি $a_n \to \infty$ আর $b_n \to \infty$ হয় তবে $a_n + b_n \to \infty$ এবং $a_n b_n \to \infty$ হবে। তবে এরা একটু কম ভদ্র, $a_n - b_n$ এবং a_n/b_n-এর বিষয়ে জোর দিয়ে কিছু বলা যায় না।

Exercise 167: যদি $a_n \to -\infty$ আর $b_n \to -\infty$ হয়, তবে নীচের sequence-গুলোর বিষয়ে কি বলতে পারো?
(i) $a_n + b_n$, (ii) $a_n - b_n$, (iii) $a_n b_n$,
■

Exercise 168: যদি $a_n \to \infty$ আর $b_n \to -\infty$ হয় এবং $\forall n \quad a_n, b_n \neq 0$ হয় তবে এদের সম্পর্কে কি বলতে পারো—
(i) $\frac{1}{a_n}$, (ii) $\frac{1}{b_n}$, (iii) $a_n + b_n$
■

এবার আসি সবচেয়ে অভদ্রদের কথায়। যদি $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$ দুজনেই oscillating হয়, তবে $a_n + b_n, a_n - b_n, a_n b_n, a_n/b_n$ এদের কাউকে নিয়েই জোর দিয়ে কিচ্ছুটি বলার জো নেই! যেমন নীচের অংকটাই ধরো। দুজন অভদ্রকে গুণ করলে কিভাবে তাদের অভদ্রতাগুলো কাটাকাটি হয় গিয়ে গুণফলটা ভদ্র হয়ে যেতে পারে দ্যাখো—

Exercise 169: Give examples of two non-convergent sequences $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ such that the sequence $\{x_n y_n\}_n$ is convergent.[2] **(2012.3a)** ■

Soln:

Let $x_n = (-1)^n$ and $y_n = (-1)^n$. Then $\{x_n\}_n$ and $\{y_n\}_n$ are non-convergent. But $x_n y_n \equiv 1$, and so $\{x_n y_n\}_n$ is a constant sequence, and hence convergent.

■

এই অংকের উদাহরণটা কি করে বানালাম সেটা বলি, কারণ কায়দাটা অন্য জায়গাতেও কাজ লাগে। প্রথমে যা খুশি একটা convergent sequence নিয়েছিলাম $\{z_n\}_n$, যেখানে সবসময়েই $z_n \neq 0$. এই অংকে $z_n \equiv 1$ নিয়েছি। এরপর যা খুশি একটা oscillating sequence নিয়েছিলাম $\{x_n\}_n$, খালি যেন $x_n \neq 0$ হয়। তারপর $y_n = z_n/x_n$ নিয়েছি। যেহেতু $x_n y_n = z_n$ হচ্ছে তাই $\{x_n y_n\}_n$-এর convergent হওয়া কেউ ঠেকাতে পারছে না। আর $\{y_n\}$

এইবার আছে $\forall n \geq N$, তাই—

$\forall n$ Take any $n \geq N$.

Check Then

$$
\begin{aligned}
& |b_n| \\
= \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_n|}{n} \\
\leq \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1 - 1}|}{n} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} \quad \left[\text{By triangle inequality} \right] \\
\leq \; & \frac{|a_1 + \cdots + a_{N_1 - 1}|}{N_2} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} \quad \left[\because n \geq N \geq N_2 \right] \\
< \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{N_1} + \cdots + a_n|}{n} \quad \left[\text{By (**)} \right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{|a_{N_1}| + \cdots + |a_n|}{n} \quad \left[\text{By triangle inequality} \right] \\
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \frac{(n - N_1 + 1)\epsilon}{2n}
\end{aligned}
$$

কারণ $|a_{N_1}|, ..., |a_n|$ প্রত্যেকেই $< \frac{\epsilon}{2}$, এবং এরা মোট $n - N_1 + 1$ জন আছে।

$$
\begin{aligned}
\leq \; & \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \quad \left[\because N_1 \geq 1 \right] \\
= \; & \epsilon,
\end{aligned}
$$

as required.

■

Exercise 186: If $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$, show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \ell.$$

[3] **(2010.4b)** ■

Soln:

আগের অংকটাই, খালি 0-র জায়গায় ℓ.

■

DAY 12

Recurrence relation

অনেক সময়ে একটা sequence-কে recurrence relation দিয়ে প্রকাশ করা হয় যেমন—

$$a_n = 2a_{n-1} - 1.$$

DAY 16

Limits

সেই উগ্রপন্থীদের রেললাইন ভাঙার উপমা মনে আছে? সেখানে আমরা ভাঙা জায়গাটায় রেললাইনের বাঁদিকের প্রান্ত আর ডানদিকের প্রান্তের কথা বলেছিলাম। গ্রাফ থেকে এই দুই প্রান্তের অবস্থান দেখেই আমরা বিভিন্ন ধরণের discontinuity-কে আলাদা করতে শিখেছি। এই বাঁদিকের প্রান্তটাকে বলে left limit, আর ডানদিকের প্রান্তটাকে বলে right limit. Fig 196 দ্যাখো। এখানে $x = a$-তে $f(x)$-এর value হল p. কিন্তু $x = a$-তে $f(x)$-এর right limit হল q, আর left limit হল r. এই কথাটাকে আমরা সংক্ষেপে লিখব—

$$f(a) = p, \quad f(a+) = q \text{ আর } f(a-) = r.$$

Right limit-কে $f(a+)$ ছাড়া $\lim_{x\to a+} f(x)$ হিসেবেও লেখা যায়। তাই আমরা এভাবেও লিখতে পারতাম—

$$\lim_{x\to a+} f(x) = q \text{ আর } \lim_{x\to a-} f(x) = r$$

এবার Fig 197 দ্যাখো। এখানে x যেদিক দিয়েই a-র কাছে আসুক, সবসময়েই $f(x)$ যাচ্ছে q-এর কাছে। এক্ষেত্রে আমরা বলি যে $x = a$-তে $f(x)$-এর limit হল q. (অর্থাৎ left বা right কথাটা আলাদা করে আর লিখি না।)

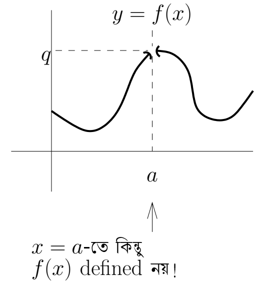


Fig 198

16.1 Domain-এর বাইরে limit

আচ্ছা, $\lim_{x\to a} f(x)$ বার করার জন্য কি a-কে $f(x)$-এর domain-এ থাকতে হবে, মানে $f(a)$-টা exist করতে হবে? এমন কি হতে পারে যে $f(a)$ হল undefined, অথচ $\lim_{x\to a} f(x)$, দিব্যি exist করে? উত্তর হল, হ্যাঁ, এমনটা সম্ভব, কিন্তু এই জায়গাটা একটু সাবধানে বুঝতে হবে।

Fig 198-এর গ্রাফটার কথাই ধরো। এখানে $f(a)$ হল undefined. (যেহেতু $x = a$-তে গ্রাফের কোনো বিন্দু নেই)। কিন্তু তাও $\lim_{x\to a} f(x) = q$. সুতরাং $x = a$ function-টার domain of definition-এর বাইরে পড়লেও $\lim_{x\to a} f(x)$ exist করছে। কিন্তু সব সময়েই যে এমনটা হবে এমন কথা নেই, যেমন Fig 199-এর ক্ষেত্রে $f(x)$-এর domain হল D, আর a রয়েছে D থেকে বেশ কিছুটা দূরে। এক্ষেত্রে অবশ্যই $\lim_{x\to a} f(x)$ নিয়ে কথা বলার কোনো মানেই হয় না!

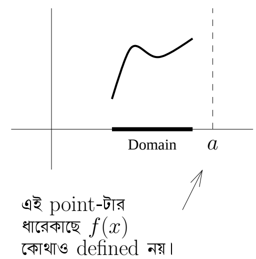


Fig 199

এরকম আরেকটা সম্ভাবনার কথা বলে এই প্রসঙ্গের ইতি টানি। Fig 200-এ $f(x)$-এর domain হল $D = [0, 1] \cup \{2\}$. এখানে $f(2)$ অবশ্যই exist করে, কিন্তু এখানেও $\lim_{x\to 2} f(x)$-এর কোনো মানে হয় না, কারণ 2 রয়েছে D-এর বাকী point-দের থেকে একটু তফাতে। সুতরাং আশা করি বুঝতে পারছ যে, $f : D \to \mathbb{R}$ হলে কেবল মাত্র তখনই $\lim_{x\to a} f(x)$-এর প্রসঙ্গ তোলা যেতে পারে যখন a হবে D-এর একটা limit point. মনে রেখো যে, a কিন্তু D-এর limit point হলেও $\lim_{x\to a} f(x)$ নাও exist করতে পারে, কিন্তু limit point না হলে exist করার প্রশ্নটাও ওঠে না। ঠিক যেমন যে ছেলে কলেজে ভর্তিই হয় নি, তার পক্ষে কলেজের পরীক্ষায় পাশ করা বা না করার প্রশ্নই নেই।

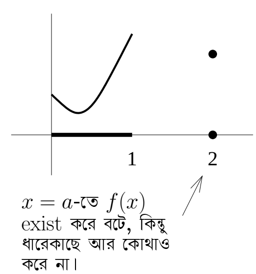


Fig 200

$\{x_n\}_n$ is convergent. ■

এবার একটা ছোট্টো ঠকানো অংক দিই, এতে ভাষার একটা সূক্ষ্ম প্যাঁচ আছে, ধরতে পারো কি না দ্যাখো!

Exercise 274: একটা sequence-এর সবগুলো convergent subsequence-ই যদি একই limit-এ converge করে, তবে মূল sequence-টাও কি convergent হবেই? ■

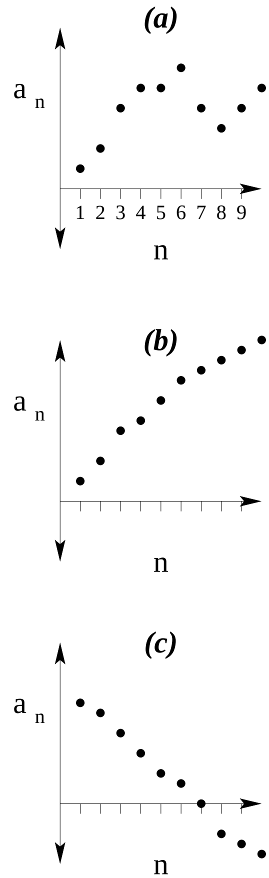


Fig 232

19.1 Bolzano-Weierstrass for sequences

আমরা বারবারই বলছি যে একটা sequence নিজে converge না করলেও তার কোনো একটা subsequence কিন্তু converge করলেও করতে পারে। এবার এই কথাটারই একটা আরো জোরদার সংস্করণ এবার প্রমাণ করব— একটা sequence যদি bounded হয় তবে তার অন্ততঃ একটা subsequence কিন্তু converge করবেই! এই কথাটাকে বলে **Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.** আগে আমরা যে Bolzano-Weierstrass theorem for sets করেছিলাম, তার সঙ্গে এর ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে, সেটা আমরা একটু পরেই দেখব।

Exercise 275: Prove that every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has a convergent subsequence. [4] **(2001,2003,2011)** ■

Soln:

এই অংকটা কিছু বড়, তাই ধাপে ধাপে করব।

Step 1 : Shall show: Every sequence has either a nondecreasing or a nonincreasing subsequence:

কোনো sequence-এর গ্রাফ আঁকার ব্যাপারটা এবার খুব কাজে আসবে। একটু ঝালিয়ে নেওয়া যাক। Fig 232(a)-তে একটা sequence-এর গ্রাফ রয়েছে। এটা কখনো উঠছে, কখনো নামছে, অর্থাৎ increasing বা decreasing কোনোটাই নয়। Fig 232(b)-র sequence-টা কিন্তু increasing. আর Fig 232(c)-রটা decreasing.

এবার একটা নতুন জিনিস আমদানী করব—

Call $n \in \mathbb{N}$ a "balcony" if $\forall k > n$ we have $a_n > a_k$.

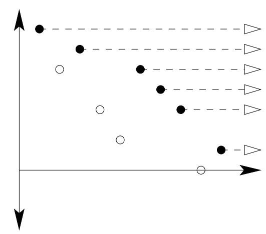


Fig 233

এই "balcony" কথাটা কোনো standard term নয়, কেবল আমাদের লেখার সুবিধার জন্য তৈরী করা। ব্যাপারটা বোঝার জন্য Fig 233 দ্যাখো। এখানে কালো কালো বিন্দুগুলো হল balcony. সাদাগুলো নয়। ছবি দেখে এটা কি করে বোঝা যাচ্ছে? ধরো তুমি একটা কালো বিন্দুতে আছো, সেখান থেকে সোজা ডানদিকে তাকাও, ড্যাশ্ ড্যাশ্ তীর চিহ্ন বরাবর। লক্ষ করে যে তোমার দৃষ্টি কোথাও বাধা পাবে না, অর্থাৎ ডানদিকের আর কোনো বিন্দু তোমার ওপরে মাথা তোলেনি। এই

Pick any $u_k \in U_n$.

Then $u_k = s_k + t_k$, where $s_k \in S_n$ and $t_k \in T_n$.

$\therefore s_k \geq \inf S_n$ and $t_k \geq \inf T_n$.

$$\therefore u_k = s_k + t_k \geq \inf S_n + \inf T_n.$$

So $\inf S_n + \inf T_n$ is indeed a lower bound for U_n, completing the proof.

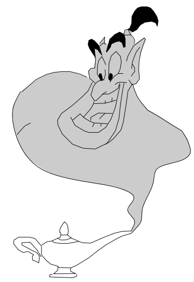


Fig 249

■

Exercise 302: If $\{u_n\}_n$ and $\{v_n\}_n$ are bounded sequences, prove that

$$\overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n \geq \overline{\lim}(u_n + v_n).$$

[2] **(2011.4c)** ■

Soln:

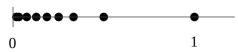


Fig 250

এই অংকটা একেবারেই আগের মত, খালি $\liminf$-এর জায়গায় $\limsup$, তাই আর নতুন করে করলাম না।

■

DAY 22

Cauchy sequences

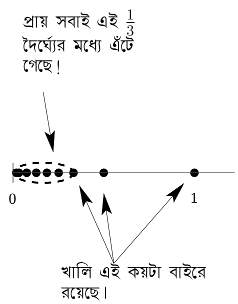


Fig 251

আরব্যরজনীর গল্পে একরকম জিনের কথা আছে যারা আকারে বিশাল, মেঘের মত পুরো আকাশ ছেয়ে চারিদিক অন্ধকার করে ফেলে অথচ আবার ছোটো হতে হতে একটা কলসী কিংবা নস্যির কৌটোর মধ্যে দিব্যি এঁটে যেতে পারে। কোনো কোনো sequence-এরও এইরকম স্বভাব। এমনিতে যে কোনো sequence-এই infinitely many term থাকে, কিন্তু এইসব sequence-দের ক্ষেত্রে term-গুলো পরস্পরের এতই কাছাকাছি যে অতি ক্ষুদ্র জায়গার মধ্যেই প্রায় সবগুলো term-ই এঁটে যায়। "প্রায় সবগুলো" বলার কারণ এই যে অনেক সময়ে গোড়ার দিকের finitely many term বাইরে থেকে যায়, বাকী infinitely many term ঢুকে যায় ছোটো জায়গাটুকুর মধ্যে। এই রকম sequence -দের বলে **Cauchy sequence.**

Example 82: ধর এই sequence-টা—$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Fig 250 দেখলেই বুঝবে যে term-গুলো কি রকম 0-র কাছে ভীড় করে আছে। তুমি আমাকে যত ছোটো খুশী একটা $\epsilon > 0$ দাও, আমি প্রায় সবগুলো term-কেই ϵ সাইজের একটা কৌটোতে ভরে ফেলতে পারব। যেমন যদি $\epsilon = \frac{1}{3}$ দাও, তবে প্রথম তিনটে term বাদে বাকী সবাই $(0, \frac{1}{3})$-র মধ্যে ধরে যাবে (Fig 251). যদি $\epsilon = \frac{1}{10}$ দাও, তাহলেও প্রায় সবাইকেই আমি $(0, \frac{1}{10})$-এর মধ্যে পেয়ে যাব, খালি প্রথম দশটা বাইরে থেকে যাবে (Fig 252).

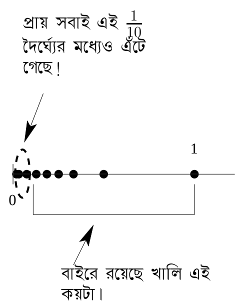


Fig 252

একই কাজ করা যাবে যে কোনো $\epsilon > 0$-এর জন্যই। তাই এই sequence-টা একটা Cauchy sequence. ■

$\therefore f$ cannot be uniformly continuous on $(0, 1]$.

■

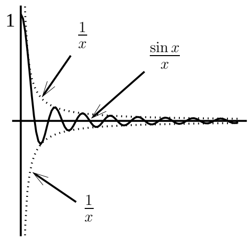


Fig 302

একটা function দেওয়া থাকলে কি করে বুঝব সেটা uniformly continuous কিনা? এই প্রশ্নে এসে অনেকেই খাবি খায়। নীচের অংকটা করলে অনেকটা ধারণা হবে।

Exercise 386: Prove or disprove: $\frac{\sin x}{x}$, $x > 0$ is not uniformly continuous.[3] **(2013.6c)** ■

Soln:

সব সময়েই জানবে যে function-টার গ্রাফের আদলটা জানা থাকলে সুবিধা হয়। এখানে গ্রাফটা দেখিয়েছি Fig 302-এ। এই গ্রাফটা যে এরকম দেখতে হবে সেটা কিন্তু হাতে এঁকেই বোঝা যায়, এইভাবে— আমরা জানি যে $\sin x$-এর গ্রাফ হয় ঢেউ খেলানো, ঢেউগুলো -1 থেকে 1 পর্যন্ত ওঠানামা করে। সুতরাং $\frac{\sin x}{x}$ যে ওঠানামা করবে $\frac{1}{x}$ থেকে $-\frac{1}{x}$ পর্যন্ত এতে আর আশ্চর্যের কি আছে? সুতরাং প্রথমে $\frac{1}{x}$ আর $-\frac{1}{x}$-এর গ্রাফ দুটো হাল্কা করে এঁকে নাও, তারপর তাদের মধ্যে একটা ঢেউ খেলানো লাইন এঁকে দিলেই $\frac{\sin x}{x}$-এর গ্রাফের আদলটা পেয়ে যাবে। খালি সমস্যা হল x যখন 0-র খুব কাছে, তখন $\frac{1}{x}$ আবার ∞-র কাছে চলে যায়। কিন্তু আমরা হায়ার সেকন্ডারী থেকেই জানি যে $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. সুতরাং আমাদের ঢেউটা 1-এর গা ঘেঁসে শুরু হবে।

এবার চট্ করে গ্রাফটার গায় চোখ বুলিয়ে দ্যাখো কোথাও ভাঙাচোরা কিছু আছে কিনা। যদি থাকে তো discontinuous, সুতরাং uniform continuity-র আশা সেখানেই শেষ। এখানে অবশ্য সে সমস্যা নেই। এবার দ্যাখো গ্রাফটা কোথাও ভীষণ ভীষণ খাড়া হয়ে উঠছে (বা নামছে) কিনা। ভীষণ ভীষণ খাড়া হয়ে ওঠা কাকে বলে তার নমুনা আগের অংকেই দেখেছ। এখানে সেরকম কোনো সমস্যা নেই। ব্যস্ তুমি নিশ্চিন্ত হয়ে বলতে পারো যে এটা uniformly continuous হবেই।

Shall show that $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ is uniformly continuous on $(0, \infty)$,

প্রশ্ন হল প্রমাণ করব কি করে? আমরা জানি যে একটা continuous function সবসময়েই closed, bounded set-এর উপরে uniformly continuous হয়। কিন্তু এখানে domain-টা হল $(0, \infty)$, যেটা closed-ও নয়, bounded-ও নয়! সুতরাং সরাসরি সংজ্ঞা থেকে প্রমাণ করার চেষ্টা করি—

ie,

Target $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in (1, \infty) \ \left(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon\right)$.

$\forall \epsilon$ Take any $\epsilon > 0$.

এবার একটা $\exists$ আছে, সুতরাং ঠান্ডা মাথায় চিন্তা করতে হবে। প্রথমে লক্ষ কর যে আমাদের domain-টা $(0, \infty)$ হলেও ওটাকে

For $x \in I$ let $A_x = \big(f(x-), f(x+)\big)$.

Then A_x is nonempty and open.

Also, $\because f(x)$ is monotonic,

$\therefore x \neq y \in I$ we have $A_x \cap A_y \neq \phi$.

এবার ঠিক আগের অংকের যুক্তিটাই লাগাব—

Since $\mathbb{Q}$ is dense in $\mathbb{R}$,

there must be a rational $q_x \in A_x$.

Let $B = \{q_x \ : \ x \in I\}$.

Consider the function $f : I \to B$ defined as $f(x) = q_x$

It is onto by definition.

Also, it is one-one.

⟦ Because:

$\because A_x$'s are disjoint,

$\therefore q_x$'s are distinct.

⟧

So $f : I \to B$ is a bijection.

So I and B are equipotent.

But $B \subseteq \mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}$ is countable.

So B is countable.

So I is countable, as required.

■

30.2 $(0, 1), [0, 1]$ nonenumerable

এই বইয়ের ষষ্ঠ অধ্যায়ে terminating আর nonterminating decimal expansion-এর কথা শিখেছিলাম, মনে আছে? সেই যে Georg Cantor নামের সেই মজাদার ভদ্রলোকের কাজটা? এবার যে অংকটা শিখব সেটাও একই ভদ্রলোকের মস্তিষ্কপ্রসূত। এবং এখানে decimal expansion-এর ব্যাপারটা লাগবে। একটু মনে করিয়ে দিই। আমরা জানি যে $\frac{1}{2}$-কে লেখা যায় 0.5. একে বলে $\frac{1}{2}$-এর decimal expansion. এখানে point-এর পরে খালি একটাই সংখ্যা আছে। যেসব decimal expansion-এ point-এর পরে খালি finite সংখ্যক সংখ্যা থাকে, তাদের বলে **terminating decimal expansion**, যেমন 0.23 বা 12.3784. অনেক সংখ্যার কোনো terminating decimal expansion থাকে না, যেমন $\frac{1}{3}$. এর decimal expansion হল $0.333\cdots$ আরেকটা উদাহরণ হল $\sqrt{2} = 1.414....$ এরকম decimal expansion-দের বলে **nonterminating decimal expansion**. ষষ্ঠ অধ্যায়েই শিখেছিলাম যে, সব সংখ্যার terminating decimal expansion না থাকলেও, প্রত্যেকেরই একটা করে nonterminating decimal