আমাদের এবার কাজ হল $|A|$ বার করা। যেহেতু 3 বেশ একটা ছোটো সংখ্যা, তাই অধিকাংশ (i,j)-র জন্যই $i+j>3$ হবে, ফলে A-টা বেশ বড় set. আমরা যদি A^c নিয়ে কাজ করি সেটা বরং অনেক ছোটো। তাই আমরা সেটার সাইজ বার করব, এবং সেখানে থেকে ঘুরপথে A-র সাইজ বার করব এইভাবে, $|A|=|S|-|A^c|$.

✎Then

$$A^c=\{(i,j)\in S\ :\ i+j\leq 3\}=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}.$$

Thus $|A|=|S|-|A^c|=100-3=97.$

Hence $P(A)=\frac{|A|}{|S|}=0.97.$

■

Exercise 6: Two dice are thrown. Find the probability that the sum of the faces equals or exceeds 10.[3] **(2013.1c)**
HINT:
আগের অংকের অনুকরণে কর দেখি! ■

এর পরের অংকটার জন্য even (জোড়) আর odd (বিজোড়) সংখ্যাদের বিষয়ে কয়েকটা সহজ তথ্য লাগবে--

- দুটো even-এর গুণফল even-ই হয়, দুটো odd-এর গুণফল odd-ই হয়।
- যদি m,n দুটো integer হয় যাতে $m-n$ একটা even সংখ্যা, তবে হয় m,n দুজনেই even, নয়তো দুজনেই odd.
- যদি n একটা integer হয় তবে n এবং $|n|$ দুজনেই একইরকম হবে, মানে হয় দুজনেই even, নয়তো দুজনেই odd.

Even বা odd হওয়ার ব্যাপারটাকে অংকের ভাষায় বলে parity (যেমন ছেলে বা মেয়ে হওয়ার ব্যাপারটাকে বলে gender সেইরকম)। তাই দ্বিতীয় শর্তটাকে লিখতে পারি এইভাবে, যদি $m-n$ একটা even সংখ্যা হয়, তবে m,n-এর parity একই হতে বাধ্য। তৃতীয় শর্তটাকে লেখা যায় এইভাবে, n আর $|n|$-এর parity সর্বদা একই হয়।

Example 20: Two integers x and y are chosen at random with replacement from the first nine natural numbers $\{1,...,9\}$. Find the probability that $|x^2-y^2|$ is divisible by 2.[5]
(2005.1c)
SOLUTION: এখানে একটা কথা ব্যবহার করা হয়েছে--"with replacement". এর মানেটা বুঝে নেওয়া যাক। মনে করো যেন তোমার সামনে একটা বাক্সে নয় টুকরো কাগজে $1,...,9$ লেখা আছে। তুমি একটা সংখ্যা চোখ বুঁজে টেনে নিলে। ধরো 2 পেলে। এবার যদি আরেকটা সংখ্যা টেনে নাও, তবে বুঝতেই পারছ যে, 2 আর আসবে না, কারণ বাক্সে খালি একটাই 2 ছিল, এবং সেটা তুমি প্রথম বারেই বাক্স থেকে তুলে নিয়েছ। এইভাবে তোলাকে বলে "without replacement". কিন্তু যদি তুমি প্রথম বার 2 পাওয়ার পর সেই 2-টাকে আবার বাক্সে ফিরিয়ে দিতে (মানে replace করতে) তবে দ্বিতীয়বারেও ফের 2 আসতে পারে। এইভাবে প্রত্যেকবার টানার পর সংখ্যাটাকে আবার বাক্সে ফিরিয়ে দেওয়া হলে তাকে বলে "with replacement".

✎Let the sample space of the random experiment be S.

Any two (not necessarily distinct) numbers x,y can be chosen in $9\times 9=81$ ways.

So $|S|=81.$

We assume that all these outcomes are equally likely.

এইবার event-টার দিকে তাকানো যাক।

✎Let A be the event that $|x^2 - y^2|$ is even.

আমরা বার করতে চাই $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$. এর মধ্যে $|S|$ তো বেরিয়েই গেছে। সুতরাং পড়ে আছে খালি $|A|$ বার করা। তার জন্য A-কে দুভাগে ভেঙে নিলে সুবিধা হবে।
বলেছে যে, $|x^2 - y^2|$-কে একটা even (জোড়) সংখ্যা হতে হবে। তার মানে $x^2 - y^2$ একটা জোড় সংখ্যা, আর তার মানে x^2, y^2 হয় দুজনেই even, নয়তো দুজনেই odd. আর এটা নিশ্চয়ই জানি যে, even সংখ্যার square সর্বদা even-ই হয়। একইভাবে odd-দের square হয় odd. সুতরাং হয় x, y দুজনেই even বা দুজনেই odd.

✎$|x^2 - y^2|$ is divisible by 2
$\iff$ x^2, y^2 are both odd or both even
$\iff$ x, y are both odd or both even.

এইবার একটু set দিয়ে লেখা যাক--

✎Let A_1 be the event that both x, y are even. Let A_2 be the event that both x, y are odd.

Then $A = A_1 \cup A_2$.

$\because$ A number cannot be both odd and even at the same time,

$\therefore A_1 \cap A_2 = \phi$.

সুতরাং $|A|$ বার করার জন্য $|A_1|$ আর $|A_2|$ আলাদা করে বার করে যোগ করে দিলেই হবে। সুতরাং পরবর্তী লক্ষ্য হল A_1, A_2-র সাইজ বের করা--

✎Now A_1 can happen as follows:

- Can choose even x in 4 ways ($\because$ exactly 4 even numbers in S).
- Can choose even y again in 4 ways ($\because$ with replacement).

So $|A_1| = 4 \times 4 = 16$.

Similarly, A_2 can happen as follows:

- Can choose odd x in 5 ways ($\because$ exactly 5 odd numbers in S).
- Can choose odd y again in 5 ways ($\because$ with replacement).

So there are $|A_2| = 5 \times 5 = 25$.

So $|A| = |A_1| + |A_2| = 16 + 25 = 41$.

So the required probability is $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{41}{81}$.

■

Example 21: An integer is chosen at random from the set $\{1, 2, \ldots, 200\}$. What is the probability that the integer is divisible by 2 or 3?
(2007.1b)
SOLUTION: